التمرين الأول : (04 نقط)

في االفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ نعتبر النقط $A(2,1,2)$, $B(0,2,-1)$, $H(1,1,0)$

والمستقيم (Δ) المعرف بتمثيله الوسيطي: $\begin{cases} x = -2+6t \\ y = 1-2t \\ z = 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

1) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB).

2) بين أن (AB) و (Δ) لا ينتميان الى نفس المستوي.

3) ليكن (P) المستوي الذي يشمل المستقيم (AB) ويوازي (Δ).

أ) تحقق أن الشعاع $\vec{n}(1,5,1)$ ناظمي للمستوي (P) .

ب) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P).

جـ) أحسب المسافة بين المستوي (P) و المستقيم (Δ).

4) عين احداثيات النقطة I منتصف القطعة $[AB]$ ثم جد معادلة ديكارتية للمستوي المحوري (Q) للقطعة $[AB]$.

5) لتكن (Γ) مجموعة النقط M من االفضاء بحيث : $MA^2 - MB^2 = 2$

- تحقق أن النقطة H تنتمي إلى (Γ) ثم استنتج طبيعة المجموعة (Γ).

التمرين الثـــاني : (04 نقط)

1) تحقق أن $5^6 \equiv 1[7]$ و استنتج $5^{2016} \equiv 1[7]$

2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع $S_n = 1+5+5^2+\cdots+5^n$

أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4S_n = 5^{n+1} - 1$ واستنتج أن S_n و 5^n أوليان فيما بينهما.

ب) ليكن العدد الصحيح a . بين أن $4S_n \equiv a[7]$ إذا وفقط إذا كان $S_n \equiv 2a[7]$.

جـ) بين أن $4S_{2015} \equiv 0[7]$ واستنتج باقي قسمة S_{2015} على 7.

د) عين اصغر عدد طبيعي n غيرمعدوم بحيث يكون 7 قاسم لـ S_n .

3) ليكن n عدد طبيعي غيرمعدوم , نعتبرفي $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) : $5^n x + S_n y = 1$. تحقق أن $(5,-4)$ حل للمعادلة (E)

ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).

التمرين الثالث : (05 نقط)

1) ليكن θ عدد حقيقي من المجال $]0\,,\,\pi[$ و z عدد مركب , $P(z)$ كثير حدود معرف بمايلي :

$$P(z) = z^3 - (1-2cos\theta)z^2 + (1-2cos\theta)z - 1$$

أ) تحقق أن 1 جدر لـ $P(z)$.

ب)عين العددين الحقيقين a , b بحيث : $P(z) = (z-1)(z^2+az+b)$

جـ) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z) = 0$

2) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$, ولتكن النقط A , B , C لواحقها z_A , z_B , z_C على الترتيب حيث : $z_A = 1$, $z_B = -cos\theta + isin\theta$ و $z_C = -cos\theta - isin\theta$

أ) اكتب z_A , z_B , z_C على الشكل المثلثي ثم على الشكل الأسي .

ب) حدد طبيعة المثلث ABC ثم عين قيمه θ حتى يكون قائم في A .

جـ) عين بدلالة θ لاحقة G مركز ثقل المثلث ABC .

د) عين (Γ) مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوي التي تحقق $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| = 3\|\overrightarrow{MO}\|$

3) نفرض $\theta = \frac{3\pi}{4}$, عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^n$ حقيقيا .

التمرين الرابع : (07 نقط)

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]-1\,,+\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 + 2x + Ln(x+1)$

1) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

2) أحسب $g(0)$ ثم استنتج اشارة $g(x)$ على المجال $]-1\,,+\infty[$.

II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال ل $]-1\,,+\infty[$ كما يلي : $f(x) = x - \frac{Ln(x+1)}{x+1}$, (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) أحسب النهايات عند حدود مجال التعريف.

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1\,,+\infty[$ يكون : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

جـ) استنتج أنه إذا كان $x \in [0\,,4]$ فإن $f(x) \in [0\,,4]$.

د) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة الى (Δ).

3) أرسم كلا من المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f).

4) أحسب مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 0$ و $x = 1$.

III) (U_n) متتالية معرفة على المجموعة $\mathbb{N}$ بما يلي: $U_0 = 4$ و $U_{n+1} = f(U_n)$ من أجل كل عدد طبيعي n.

1) باستعمال المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) مثل على حامل محور الفواصل كل من U_0 , U_1 , U_2 , U_3 .

2) باستعمال البرهان بالتراجع بين أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq U_n \leq 4$

3) بين أن المتتالية (U_n) متناقصة استنتج أنها متقاربة ثم أحسب نهاية U_n عند $+\infty$.

التمرين الاول (04 نقاط)

-1

أ) التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB)

$$\begin{cases} x = 2-2\,\alpha \\ x = 1+\,\alpha \quad , \quad \alpha \in R \\ z = 2-3\alpha \end{cases}$$ 0.5

ب) $\vec{u}_{(\Delta)}(6,-2,4)$ شعاع توجيه (Δ)

$\overrightarrow{AB}$ و $\vec{u}_{\Delta}$ غير مرتبطين لأن

$$\frac{6}{-2} \neq \frac{-2}{1}$$ 0.25

ندرس التقاطع

$$\begin{cases} 2-2\,\alpha = -2+6t \\ 1+\,\alpha = 1-2t \\ 2-3\,\alpha = 4t \end{cases}$$

نجد $t = 2$ 0.25

بالتعويض في الجملة (1) نجد

$$\begin{cases} \alpha = -4 \\ \alpha = -4 \\ \alpha = -2 \end{cases}$$ تناقض

ومنه α ليس وحيد اذن المستقيمان(AB) و (Δ)غير متقاطعان فهما ليسا من نفس المستوي

-2 (P) يشمل (AB) ويوازي (Δ) معناه

أ) تحقق ان $\vec{n}\,(1,5,1)$ ناظمي للمستوي (P)

$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0$

$\vec{n}.\,\overrightarrow{u_{\Delta}} = 0$ 0.5

ب) معادلة المستوي (P) :

$\vec{n}$ ناظمي لـ (P) معناه

$(P):\ x+5y+z+d = 0$

بما أن $A \in (P)$ معناه :

$2+5(1)+2+d = 0$

$d = -9$ 0.5

ومنه

$(P):\ x+5y+z-9 = 0$

ج) حساب المسافة بين (P) و(Δ)

$$d\big((\Delta),(P)\big) = \frac{|-2+6t+5(1-2t)+4t|}{\sqrt{1^2+5^2+1^2}}$$ 0.5

$$d\big((\Delta),(P)\big) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

-3 احداثيات I منتصف $[AB]$

$I\left(1,\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ 0.25

معادلة المستوي (Q) المحوري للقطعة $[AB]$

$-2x+y-3z+d = 0$

(Q)يشمل النقطة I

$d = 2$

ومنه معادلة المستوي المحوري هي :

$(Q):-2x+y-3z+2 = 0$ 0.5

-4 $MA^2 - MB^2 = 2$

التحقق أن النقطة H تنتمي إلى (Γ) معناه :

$HA^2 = 5$

$HB^2 = 3$

$HA^2 - HB^2 = 5-3 = 2$ 0.25

ومنه $H \in (\Gamma)$

طبيعة المجموعة (Γ) حيث :

$MA^2 - MB^2 = 2$

$(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}) = 2$

$(2\,\overrightarrow{MI})\left(\overrightarrow{MA}-(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB})\right) = 2$

$\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA} = 1$

تكافئ

$\overrightarrow{BA}\,(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HI}) = 1$

تكافئ

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{BA}\,.\overrightarrow{HI} = 1$

بما أن$(\Gamma) \in H$ معناه $\overrightarrow{BA}\,.\overrightarrow{HI} = 1$ ومنه نعوض نجد : 0.5

$\overrightarrow{BA}\,.\overrightarrow{MH}+1 = 1$

$\overrightarrow{BA}\,.\overrightarrow{MH} = 0$

وبالتالي (Γ) هي المستوي الذي يشملH و $\overrightarrow{BA}$ شعاع ناظمي له

التمرين الثاني (04 نقط)

-1

$5^6 = 15625$

$5^6 \equiv 1\,[7]$ 0.25

ندرس بواقي قسمة 5^n على 7

$5^0 \equiv 1[7] \quad ,5^1 \equiv 5[7] \quad ,5^2 \equiv 4[7]$

$5^3 \equiv 6[7] \quad ,5^4 \equiv 2[7] \quad ,5^5 \equiv 3[7]$ 0.25

$5^6 \equiv 1[7]$

دورية و دورها $k = 6n$

$5^6 \equiv 1[7]$

$5^{2016} \equiv 5^{6n} \equiv 1[7]$

$2016 = 6\ \times 336 = 6n$ 0.25

-2 $S_n = 1+5+5^2+\ \dots+5^n$

أ) بين أن من أجل كل عدد طبيعيn و $4S_n = 5^{n+1}$

لذلك نحسب

$S_n = 1+\ 5^0+\ 5^1+5\times 5\dots 5^n$

مجموع حدود متتالية هندسية حدها الاول 1 و أساسها $q = 5$

$$S_n = 1\left(\frac{5^{n+1}-1}{5-1}\right)$$ 0.25

و منه

0.25 $4S_n = 5^{n+1} - 1$

لدينا $4S_n = 5^{n+1} - 1$

تكتب على الشكل $5 \times 5^n - 4S_n = 1$

0.25 يوجد $(5, -4)$ بحيث $5 \times 5^n - 4S_n = 1$

ومنه 5^n , S_n أوليان فيما بينهما

ب) بين اذا كان $4S_n \equiv a\ [7]$ فإن $S_n \equiv 2a\ [7]$

لدينا

$4S_n \equiv a\ [7]$

0.25 نضرب في 2

$8S_n \equiv 2a\ [7]$

$8 \equiv 1\ [7]$

ومنه $S_n \equiv 2a\ [7]$

العكس :

بين أنه إذا كان $S_n \equiv 2a\ [7]$ فان $4\,S_n \equiv a\ [7]$

لدينا

$S_n \equiv 2a\ [7]$

نضرب في العدد 4

$4S_n \equiv 8a\ [7]$

0.25 $8a \equiv a\ [7]$

$4\,S_n \equiv a\ [7]$

جـ) بين أن : $4\,S_{2015} \equiv 0\ [7]$

باستعمال السؤال 1 نجد $5^{2016} \equiv 1\ [7]$ و منه

$4\,S_{2015} \equiv 5^{2016} - 1\ [7]$

0.25 $5^{2016} - 1 \equiv 0\ [7]$

$4\,S_{2015} \equiv 0\ [7]$

استنتج باقي قسمة S_{2015} على 7

لدينا حسب ما سبق:

$4\,S_{2015} \equiv 0\ [7]$

0.25 فان

$S_{2015} \equiv 2 \times 0\ [7]$

ومنه باقي قسمة على 7 هو العدد 0

د) عين اصغر عدد طبيعي n حيث يكون 7 قاسم لـ S_n

معناه: $S_n \equiv 0\ [7]$

$5^{n+1} - 1 \equiv 0\ [7]$

0.5 $5^{n+1} \equiv 1\ [7]$

$5^{n+1} \equiv 5^0\ [7]$

$n+1 = 0, \quad n = -1,$ مرفوضة -1

وهو المطلوب , $n+1 = 6, \quad n = 5$

$S_n = \dfrac{5^{n+1} - 1}{4}$

-3 حلول المعادلة (E) هي :

01 $(x, y) = (KS_n + 5\ , -K \times 5^n - 4)\ , \quad K \in \mathbb{Z}$

التمرين الثالث(05 نقط)

-1

0.25 أ) $P(1) = 0$

0.5 ب) $\begin{cases} a = 2\cos\theta \\ b = 1 \end{cases}$

ج) حلول المعادلة هي:

0.5 $S = \{\mathbf{1};\ -\cos(\theta) + i\sin(\theta)\ ; -\cos(\theta) - i\sin(\theta)\}$

-2 أ) الشكل المثلثي :

.025 $Z_A = \cos 2\pi + i \sin 2\pi$

$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$

$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$

.025 $Z_B = \cos(\pi - \theta) + i\sin(\pi - \theta)$

$Z_C = \overline{Z_B}$

.025 ومنه $Z_C = \cos(-\pi + \theta) + i\sin(-\pi + \theta)$

الشكل الأسي:

$Z_A = e^{2i\pi}$

.075 $Z_B = e^{i(\pi - \theta)}$

$Z_C = e^{i(-\pi + \theta)}$

ب) طبيعة المثلث ABC

.025 $|AC| = [Z_C - Z_A] = \sqrt{2 + 2\cos\theta}$

.025 $|AB| = [Z_B - Z_A] = \sqrt{2 + 2\cos\theta}$

ومنه المثلث متساوي الساقين

.025 نعين θ حتى يكون المثلث ABC قائم في A :

.025 الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}\,.\overrightarrow{AC} = 0$ نجد $\theta = \frac{\pi}{2}$

جـ) $Z_G = \frac{Z_A + Z_B + Z_C}{3}$

.025 $Z_G = \frac{1 - 2\cos\theta}{3}$

د) المجموعة (Γ) حيث :

$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 3\|\overrightarrow{MO}\|$

معناه $MG = MO$

0.5 ومنه (Γ) محور القطعة $[OG]$ حيث G مركز ثقل المثلث ABC

-3 قيم العدد الطبيعي n حتى يكون :

$\left(\frac{Z_B}{Z_C}\right)^n = \cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2}$

$\left(\frac{Z_B}{Z_C}\right)^n$ حقيقيا معناه $\cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2}$ حقيقيا

أي $sin\,\frac{n\pi}{2} = 0$

0.5 ومنه $\frac{n\pi}{2} = k\pi$

و بالتالي: $n = 2k$ مع $k \in N$

التمرين الرابع (07 نقط)

I.

1) المشتقة:

$$g'(x) = 2(x+1) + \frac{1}{x+1}$$ 0.25

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1,+\infty[$: 0.25

$g'(x) > 0$

ومنه الدالة متزايدة تماما

جدول التغيرات: 0.25

x	-1 $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$\nearrow$

0.25

2) حساب : $g(0) = 0$ 0.25

اشارة: $g(x) > 0$ لما $x \in]0,+\infty[$

$g(x) < 0$ لما $x \in]-1,0[$

II.

1) النهايات: 0.25

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ >}} f(x) = +\infty$ 0.25

$x = -1$ مستقيم مقارب

2) 0.5

أ) حساب المشتقة:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$$ 0.25

ب) $f'(x)$ هي من اشارة $g(x)$ ومن ثم الدالة f متزايدة تماما على $[0,+\infty[$ ومتناقصة تماما على $]-1,0]$

جدول التغيرات 0.25

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$

ج) لدينا: $0 \le x \le 4$ 0.25

بما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0,4]$ فان

: $f(0) \le f(x) \le f(4)$

$$0 \le f(x) \le 4 - \frac{ln5}{5} \le 4$$ 0.25

د) $y = x$ مستقيم مقارب للمنحنى:

$\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - x] = 0$

دراسة الوضعية: 0.25

x	-1	0	$+\infty$
$f(x) - x$	$+$		$-$
الوضعية	أعلى	يقطع	أسفل

3) التمثيل البياني (C_f) و (Δ)

4) حساب مساحة الحيز

0.25 $A = \int_0^1 (x - f(x))\,dx$

0.25 $= \int_0^1 \frac{\text{Ln}(x+1)}{x+1}\,dx$

0.25 $= \frac{1}{2}[[\text{Ln}(x+1)]^2]_0^1$

$= \frac{1}{2}(\text{Ln}(2))^2$

III.

2) باستعمال البرهان بالتراجع:

نتحقق من أجل $n = 0$ لدينا: $U_0 = 4$

$0 \le U_0 \le 4$

نفرض أن: $0 \le U_n \le 4$ 0.75

بما أن الدالة متزايدة على المجال $[0,4]$ فان:

$f(0) \le f(U_n) \le f(4)$

$0 \le f(U_n) \le 4$

حسب النتيجة 2) جـ) فان: $0 \le U_{n+1} \le 4$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n فان: $0 \le U_n \le 4$

0.25 3) المتتالية (U_n) متناقصة لأن من أجل كل x من $[0,+\infty[$

$f(x) - x \le 0$

و بما أن من أجل كل عدد طبيعي n :

$0 \le U_n \le 4$

0.25 فان: $f(U_n) - U_n \le 0$ أي $U_{n+1} - U_n \le 0$

لدينا المتتالية (U_n) متناقصة و محدودة من الاسفل بالعدد 0 فهي متقاربة

حساب

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

المتتالية (U_n) متقاربة ومنه:

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$

و بما أن $U_{n+1} = f(U_n)$

0.25 والدالة f مستمرة على المجال $]-1,+\infty[$ فان:

$f(l) = l$

ومنه $f(l) - l = 0$

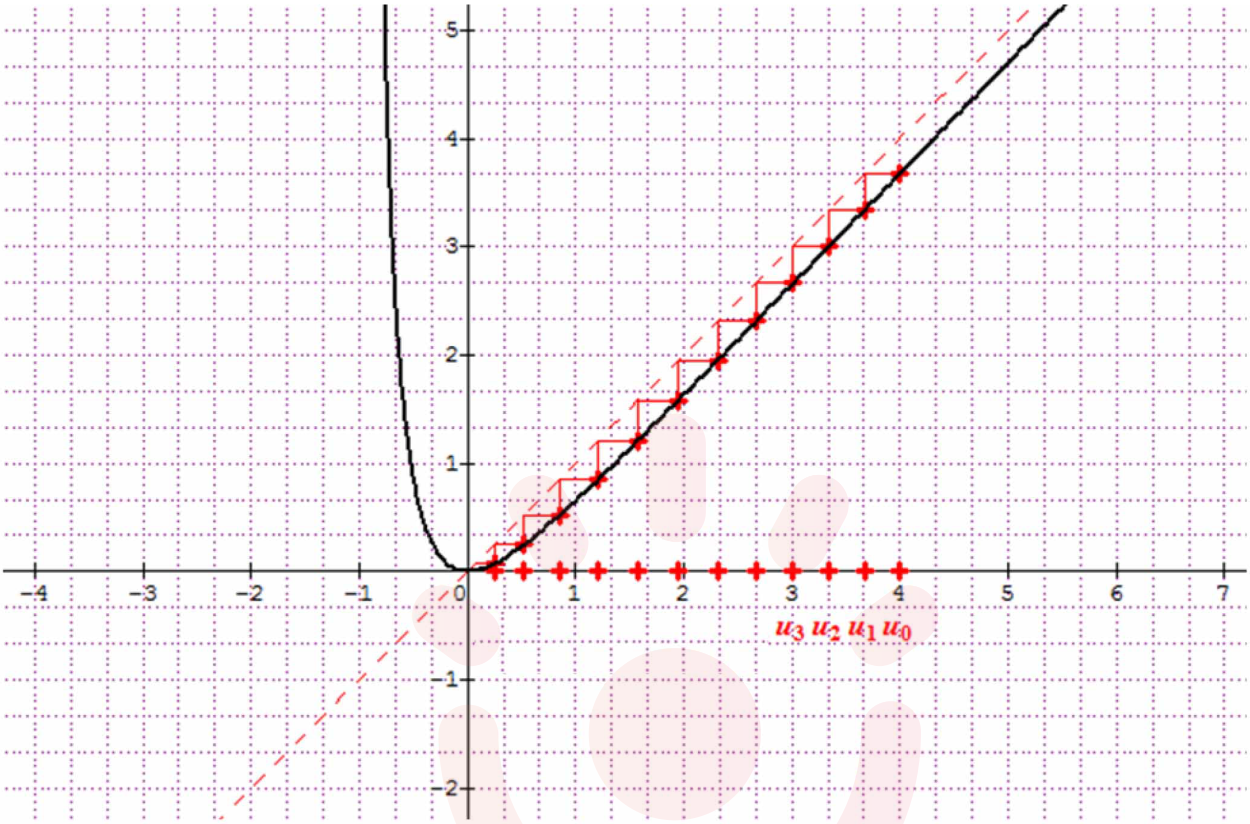
و حسب ما سبق $l = 0$ بالتالي

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

0.5

0.5

0.25



التمثيل البياني للتمرين الرابع للموضوع الأول